TD$_{21}$ – Courbes et surfaces de l'espace

Exercice 1 ★

On considère la surface $\mathscr{S}$ paramétrée par $\begin{cases} x(u,v) &= u^2+uv+v^2 \\ y(u,v) &= u+v \\ z(u,v) &= u^3+v^3 \end{cases}$

1. Déterminer les points réguliers de $\mathscr{S}$.
2. Donner une équation cartésienne du plan tangent à $\mathscr{S}$ en $A(1,0,0)$.

Exercice 2 ★★

On considère la surface $\mathscr{S}$ paramétrée par $\begin{cases} x(u,v) &= \dfrac{\cos(u)}{\mathrm{ch}(v)} \\ y(u,v) &= \dfrac{\sin(u)}{\mathrm{ch}(v)} \\ z(u,v) &= \dfrac{\mathrm{sh}(v)}{\mathrm{ch}(v)} \end{cases}$

1. Déterminer les points réguliers de $\mathscr{S}$.
2. Déterminer une équation cartésienne de $\mathscr{S}$.

Exercice 3 ★

On considère la surface $\mathscr{S}$ d'équation

$$(x^2+y^2+z^2+3)^2-16(x^2+y^2)=0$$

1. Déterminer les points réguliers de $\mathscr{S}$.
2. Donner une équation cartésienne du plan tangent à $\mathscr{S}$ en $A(3,0,0)$.

Exercice 4 ★★

Soit $(S_1) : x^2-y^2+2xz-2yz-2x-\dfrac{1}{3}=0$ et $(S_2) : x^2-y^2+2xz-2yz=0$.

1. Montrer que (S_2) est la réunion de deux plans dont on précisera l'intersection (D).
2. Déterminer le point de (S_1) en lequel le plan tangent à (S_1) est orthogonal à (D).

Exercice 5 ★★

Pour $t \in \mathbb{R}$ on considère la droite $\mathscr{D}_t$ de l'espace passant par le point $A_t(t,t,t^2)$ et dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}_t(0,2,t)$. On note $\mathscr{S}$ la surface réglée engendrée par la famille $(\mathscr{D}_t)_{t\in\mathbb{R}}$

1. Déterminer une paramétrisation de $\mathscr{S}$
2. Déterminer une équation cartésienne de $\mathscr{S}$

Exercice 6 ★★★

Soit $\mathscr{S}$ la surface de l'espace d'équation $(x+z)^2+2y^2=2$

1. Soit $M_0 \in \mathscr{S}$. Déterminer les droites tracées sur $\mathscr{S}$ passant par M_0.
2. La surface $\mathscr{S}$ est-elle réglée ?

Exercice 7 ★★★

Soit Δ la droite d'équations $x=y=z$ et D la droite d'équations $\begin{cases} x-z=2 \\ y-2z=1 \end{cases}$.

1. Vérifier que ces deux droites ne sont pas coplanaires.
2. Déterminer une équation de la surface de révolution engendrée par la rotation de D autour de Δ.

Exercice 8 ★★★

Soit (C) la courbe d'équations $\begin{cases} x = z^2 + 2z \\ y = 2z^2 - z \end{cases}$ On considère le repère $(O, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}, \overrightarrow{K})$, avec $\overrightarrow{K} = \frac{1}{\sqrt{30}}(2, -1, -5)$, $\overrightarrow{I} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2, 0)$ et $\overrightarrow{J} = \overrightarrow{K} \wedge \overrightarrow{I} = \frac{1}{\sqrt{6}}(2, -1, 1)$.

1. Déterminer les équations de (C) dans le repère $(O, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}, \overrightarrow{K})$. Que reconnait-on ?
2. Déterminer une équation cartésienne de la surface de révolution engendrée par la rotation de (C) autour l'axe $y = 2x, z = 0$.

Exercice 9 ★★★

Déterminer une équation cartésienne de la surface $(\mathcal{S})$ de révolution engendrée par la rotation autour de l'axe $x = y = z$ de la courbe $\mathcal{C}$ paramétrée par $x = t, y = t^2$ et $z = -t^2$.

Exercice 10 ★★★★

Soit (Γ) : $\begin{cases} x(t) = \cos^3(t) \\ y(t) = \sin^3(t) \\ z(t) = \cos(2t) \end{cases}$, pour $t \in [0, 2\pi]$.

1. Déterminer un paramétrage de la surface (S) de révolution engendrée par la rotation de (Γ) autour de l'axe (Oz).
2. Déterminer une équation de la surface (S) de révolution engendrée par la rotation de (Γ) autour de l'axe (Oz).

Exercice 11 ★★

Déterminer et dessiner les projections orthogonales sur chacun des plans de coordonnées de l'hélice circulaire paramétrée par :

$$\begin{cases} x(t) = \cos(t) \\ y(t) = \sin(t) \\ z(t) = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Exercice 12 ★★★

Soit (S) la surface paramétrée par $\begin{cases} x(u, v) = u^2 \\ y(u, v) = uv \\ z(u, v) = 2u + v \end{cases}$, avec $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.

1. Montrer que (S) est une surface réglée.
2. Déterminer l'ensemble des points de (S) tels que le plan tangent à (S) soit parallèle à l'axe (Ox).
3. Donner une équation cartésienne de (S).

Exercice 13 ★★

Déterminer les plans tangents à la surface $\mathcal{S}$ d'équation $z^3 = xy$ qui contiennent la droite $\mathcal{D} : x = 2, y = 3z - 3$.

Exercice 14 ★★

On considère la surface S définie par l'équation cartésienne $x^4 - y^2 + xz = 1$.

1. Donner les éléments de symétrie de la surface S.
2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Donner la nature de l'intersection avec le plan d'équation $x = \alpha$.
3. Soit la courbe Γ définie par $\begin{cases} x^4 - y^2 + xz = 1 \\ 2x + y + z = 4 \end{cases}$. Déterminer la tangente à Γ au point $A(1, 1, 1)$.

Exercice 15 ★★

Soit S la surface d'équation cartésienne $x^2 + y^2 + 2z^2 = 1$ et D la droite définie par $y = 3x, z = -2x$. Déterminer les plans tangents à la surface S et orthogonaux à la droite D.

Exercices issus d'oraux

Exercice 16 ★★
(*Oral 2008*)

Soit D la droite d'équations $x = y = z$ et $\mathcal{C}$ la courbe d'équations $\begin{cases} z = 0 \\ xy = 1 \end{cases}$.

Déterminer une équation cartésienne de la surface de révolution obtenue par rotation de $\mathcal{C}$ autour de D.

Exercice 17 ★★
(*Oral 2019*)

Soit (S) la surface d'équation $2x^2 - 3yz + 4z - 1 = 0$

1. Déterminer les points réguliers de (S).
2. Déterminer une équation du plan tangent à (S) en un point $M(a, b, c)$.
3. Déterminer les plans tangents contenant la droite d'équations $\begin{cases} y = 2 \\ x = z \end{cases}$

Exercice 18 ★★★
(*Oral 2016*)

Soit $M(t)$ le point de l'espace de coordonnées $(x(t), y(t), z(t))$ où x, y et z sont les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $u'' + u = 1$ qui vérifient

$$x(0) = 2, \quad x'(0) = 3, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -3, \quad z(0) = 5, \quad z'(0) = 0$$

On note Γ la courbe décrite par le point $M(t)$ lorsque t décrit $\mathbb{R}$.

1. Déterminer $x(t), y(t)$ et $z(t)$ pour tout réel t
2. Montrer que Γ est incluse dans un plan et donner une équation cartésienne de ce plan
3. Montrer que Γ est incluse dans une sphère et donner une équation cartésienne de cette sphère
4. En déduire que Γ est un cercle. Donner le centre et le rayon de ce cercle.

Exercice 19 ★★★
(*Oral 2018*)

Soit D la droite d'équations $\begin{cases} x = 1 \\ y = z \end{cases}$ et Δ la droite d'équations $\begin{cases} x = 1 \\ y = -z \end{cases}$

1. De quelle nature sont D et Δ ?
2. On note D_θ (respectivement Δ_θ) l'image de D (respectivement Δ) par la rotation d'angle θ d'axe dirigé et orienté par $\overrightarrow{k}$.
   (a) Donner une équation de D_θ
   (b) Soit (S) d'équation $x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0$. Montrer que (S) est la réunion de droites D_θ pour $\theta \in \mathbb{R}$.
3. Soit $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un point de (S). Donner l'équation du plan tangent à (S) en M_0.